DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SÉRIE HARMONIQUE

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $k_n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid H_k \geq n\}$.

Lemme : $\forall \alpha > 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

1• Il existe $\gamma > 0$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, appelée constante d'EULER.

2• k_n est bien défini, et $\frac{k_{n+1}}{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.

Preuve du Lemme : Comme $\alpha > 1$, $\varphi : t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive, décroissante et intégrable sur $[1,+\infty[$. Pour tout $k \geq 2$,

$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, donc

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

1▸ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Montrons que $((u_n)_n, (v_n)_n)$ est un couple de suites adjacentes.

▹ $0 \leq u_n - v_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

▹ $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$

car $\forall x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ par concavité de $\ln$. Donc $(u_n)_n$ est décroissante.

▹ $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq 0$

car $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ par concavité.

Ainsi, d'après le théorème des suites adjacentes, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \gamma$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \gamma \geq v_n$. En particulier, $\gamma \geq v_2 = 1 - \ln(2) > 0$. Ainsi, $u_n = \gamma + o(1)$, i.e. $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $t_n = u_n - \gamma$. Pour tout $n \geq 2$,

$$t_n - t_{n-1} = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{-1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{-1}{2n^2}.$$

Comme $-\frac{1}{2n^2}$ est de signe constant, $t_n - t_{n-1}$ l'est également à partir d'un certain rang, et $\sum_{n\geq 1} -\frac{1}{2n^2}$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} t_n - t_{n-1}$ aussi. De là, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} t_k - t_{k-1} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2} \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n}$ (preuve à la fin), mais $\sum_{k=n+1}^{+\infty} t_k - t_{k-1} = \lim_{k\to+\infty} t_k - t_n = -t_n$, donc $t_n \sim \frac{1}{2n}$.

Cela montre bien que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $w_n = t_n - \frac{1}{2n}$. Pour $n \geq 2$,

$$w_n - w_{n-1} = t_n - t_{n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} = u_n - u_{n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

$$= \cancel{\frac{1}{n}} - \left(\cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n}\left(\cancel{1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= -\cancel{\frac{1}{2n^2}} - \frac{1}{3n^3} + \cancel{\frac{1}{2n^2}} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{6n^3}.$$

De même que précédemment, $-w_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k - w_{k-1} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \sim \frac{1}{6}\,\frac{1}{2n^2}$, donc $w_n = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, i.e.

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

2▸ Comme $H_n \sim \ln(n)$, $H_n \longrightarrow +\infty$ donc $(k_n)_n$ est bien définie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $(\varepsilon_n)_n$ telle que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$. Ainsi, $\ln(k_n) + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geqslant n > \ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n-1}$ par définition de k_n, donc $k_n e^{\gamma} e^{\varepsilon_{k_n}} \geqslant e^n > (k_n-1)e^{\gamma}e^{\varepsilon_{k_n-1}}$. De là, $e^{\varepsilon_{k_n}} \geqslant \frac{e^n e^{\gamma}}{k_n} \geqslant \frac{k_n - 1}{k_n} e^{\varepsilon_{k_n-1}}$. Or $(H_n)_n$ est strictement croissante, donc $(k_n)_n$ aussi, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_{k_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_{k_n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k_n - 1}{k_n} = 1$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n e^{-\gamma}}{k_n} = 1$, i.e. $k_n \sim e^n e^{-\gamma}$, donc $\frac{k_{n+1}}{k_n} \sim e$, i.e. $\frac{k_{n+1}}{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$. ■